Proseminar Partielle Differentialgleichungen 2

Gerald Teschl

SS2007

Bemerkung: Die meisten Beispiel sind aus dem Buch von L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 1998.

1. a) Berechne die Fouriertransformierte $\hat{u}$ der Funktion

$$u(x) := \begin{cases} 1\,, & |x| < a \\ 0\,, & |x| > a \end{cases}$$

   b) Zeichne u und $\hat{u}$ für $a = 3$.

2. a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $g(x) := f(x + a)$. Zeige:

$$\hat{g}(p) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ap} \hat{f}(p)\,.$$

   b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für $h(x) := f(ax)$ gilt:

$$\hat{h}(p) = \frac{1}{a^n} \hat{f}(\frac{p}{a})\,.$$

3. Zwei Zahlen $x, y \in [0, 1)$ seien äquivalent falls $x - y$ rational ist. Die Vitali-Menge V wird konstruiert indem man aus jeder Äquivalenzklasse einen Räpresentanten auswählt. Zeige, dass V für kein nichttriviales translationsinvariantes Maß messbar sein kann.

   Hinweis: Wie kann man $[0, 1)$ durch Translationen von V zusammensetzten?

4. Es sei f_n eine Folge messbarer Funktionen mit dem punktweisen Grenzwert f. Man zeige: Existiert eine integrierbare Funktion $g(x)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$, so gilt
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

5. Es sei $y \mapsto f(x, y)$ messbar für alle x und $x \mapsto f(x, y)$ stetig für alle y. Man zeige: Existiert eine integrierbare Funktion $g(y)$ mit $|f(x, y)| \leq g(y)$, dann ist
$$F(x) = \int_A f(x, y)\, d\mu(y)$$
   stetig.

6. Es sei $y \mapsto f(x, y)$ messbar für alle x und $x \mapsto f(x, y)$ differenzierbar für alle y. Man zeige:

   - $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ ist messbar.
   - Existiert eine integrierbare Funktion $g(y)$ mit $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)| \leq g(y)$, dann ist
$$F(x) = \int_A f(x, y)\, d\mu(y)$$
     differenzierbar und es gilt
$$F'(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, d\mu(y)$$

7. Es sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweise die Ungleichung

$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \qquad a, b \ge 0.$$

(Hinweis: Logarithmiere beide Seiten der Ungleichung.)

8. Es sei $\mu(X) < \infty$. Dann gilt $L^\infty(X, d\mu) \subseteq L^p(X, d\mu)$ und

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty, \qquad f \in L^\infty(X, d\mu).$$

9. Konstruiere eine Funktion $f \in L^p(0,1)$ die an jeder rationalen Zahl in $[0,1]$ eine Singularität hat.

   (Hinweis: Beginne mit der Funktion $f_0(x) = |x|^{-\alpha}$ die bei 0 eine einzelne Singularität hat, dann hat $f_j(x) = f_0(x - x_j)$ eine Singularität bei x_j.)

10. Zeige folgende Verallgemeinerung der Hölder-Ungleichung:

$$\|f\, g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

11. Die Faltung zweier Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist wieder in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

    (Hinweis: Fubini.)

12. Es sei φ glatt mit kompakten Träger in $(0,1)$. Setze $f_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \varphi(x-k)$. Dann gilt $\|f_m\|_1 = m\|\varphi\|_1$ und $\|\hat{f}_m\|_\infty \le const$ (mit einer von m unabhängigen Konstanten).

    Folgere daraus, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R})$ nicht beschränkt invertierbar ist.

    (Hinweis: Wegen $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $\hat{\varphi}(p) \le const(1+|p|)^{-2}$.)

13. Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}(p) \ne 0$ f.ü. Dann ist die Menge $\{f(x+a) | a \in \mathbb{R}^n\}$ total in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (d.h., das orthogonale Komplement enthält nur den Nullvektor).

    (Hinweis: Da die Fouriertransformation unitär ist folgt für das Skalarprodukt: $\langle g(x), f(x+a)\rangle = \langle \hat{g}(p), \mathrm{e}^{\mathrm{i}pa} \hat{f}(p)\rangle$.)

14. Berechne die Fouriertransformation der charakteristischen Funktion des Einheitsintervalls $\chi_{[0,1]}(x)$.

15. Finde mithilfe der Fouriertransformation eine Darstellungsformel für die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) - \mu u_x(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = g(x).$$

16. Leite die d'Alembert'sche Lösungsformel für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = g(x), \quad u_t(0,x) = h(x),$$

mithilfe der Fouriertransformation her.

17. Zeige mithilfe der Fouriertransformation, dass für Lösungen der Gleichung

$$u_t(t,x) - u_{xxx}(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = g(x),$$

die L^2 Norm erhalten ist:

$$\|u(t)\|_2 = \|g\|_2.$$

18. Berechne die Asymptotik der Lösungen der Gleichung

$$u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = g(x),$$

für $t \to \infty$ mit $\frac{x}{t} = c$ und Anfangsbedingung g mit $\hat{g} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Unterscheide die Fälle $c < 0$ und $x > 0$.

19. Zeige, dass der Hölderraum $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ für $k \in \{0, 1, \ldots\}$, $0 < \gamma \leq 1$ ein Banachraum ist.

20. Eine Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{C}$ heisst absolut stetig, falls

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(t)dt$$

mit $v \in L^1(0,1)$.

Zeige u ist genau dann absolut stetig, wenn $u \in W^{1,1}(0,1)$ und es gilt $u' = v$ in diesem Fall. Ausserdem gilt $u \in W^{1,p}(0,1)$ genau dann wenn $v \in L^p(0,1)$ ist.

Anleitung:
1) Für absolut stetige Funktionen gilt die Regel der partiellen Integration:

$$\int_0^1 u_1(t)v_2(t)dt = u_1(1)u_2(1) - u_1(0)u_2(0) - \int_0^1 v_1(t)u_2(t)dt.$$

(Hinweis: $\int_0^1 (u_1(t)v_2(t) + v_1(t)u_2(t))dt = \int_0^1 \int_0^1 v_1(s)v_2(t)ds\,dt + \cdots$.)
2) $\int_0^1 u(t)\phi'(t)dt = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(0,1)$ genau dann wenn f konstant ist.
(Hinweis: Sei $\phi_0 \in C_c^\infty(0,1)$ mit $I(\phi_0) = \int_0^1 \phi_0(t)dt = 1$. Dann kann jedes $\phi \in C_c^\infty(0,1)$ als $\phi(t) = \Phi'(t) + I(\phi)\phi_0(t)$ mit $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds - I(\phi)\int_0^t \phi_0(s)ds$ geschrieben werden.)

21. Zeige dass für $u \in W^{1,p}(0,1)$ die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \le \left(\int_0^1 |u'(t)|dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}$$

gilt.

(Hinweis: Hölderungleichung.)

22. Zeige dass $u \in H^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

erfüllt.

(Hinweis: $|u(x)|^2 = |u(0)|^2 + 2\int_0^x \mathrm{Re}(\overline{u(t)}u'(t))dt$.)

23. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $U \subset\subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ mit V_i offen. Zeige, dass es eine glatte (C^∞) Zerlegung der Eins $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ gibt:

$$\begin{cases} 0 \le \zeta_i \le 1, \quad \mathrm{supp}(\zeta_i) \subset V_i, \quad 1 \le i \le N, \\ \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1 \text{ auf } U. \end{cases}$$

24. Zeige mittels partieller Integration, dass

$$\int_U |Du|^2 dx \le C \left(\int_U |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_U |D^2 u|^2 dx \right)^{1/2}$$

für alle $u \in C_c^\infty(U)$ gilt. Zeige durch Approximation, dass die Unlgeichung für $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ gültig bleibt.

25. Es sei U zusammenhängend und $u \in W^{1,p}(U)$ erfülle

$$Du = 0 \quad \text{a.e. in } U.$$

Zeige u ist konstant (a.e.) in U.

(Hinweis: Theorem 1 aus Abschnitt 5.3.1.)

26. Zeige, dass für $n > 1$ die unbeschränkte Funktion $u(x) = \log\log(1 + \frac{1}{|x|})$ in $W^{1,n}(U)$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\}$, liegt.

27. Es sei $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit F' beschränkt und $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeige, falls $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$, dann ist auch $v = F(u) \in W^{1,p}(U)$ und es gilt
$$v_{x_i} = F'(u) u_{x_i}.$$
(Hinweis: Es gilt $|F(x)| \le |F(0)| + L|x|$ mit $L = \sup F'(x)$. Konvergente Folgen in L^p haben punktweise konvergente Teilfolgen.)

28. Es sei U beschränkt. Zeige, falls $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$, dann ist auch $|u| \in W^{1,p}(U)$.
(Hinweis: $|u| = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$, $F_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon^2 + x^2}$.)

29. Es sei
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu.$$
Zeige, dess es eine Konstante $\mu > 0$ gibt, so dass die zugehörige Bilinearform $B[.,.]$ die Voraussetzungen des Lax–Milgam–Theorems erfüllt falls
$$c(x) \geq -\mu, \qquad (x \in U).$$

30. Eine Funktion $u \in H_0^2(U)$ ist eine schwache Lösung des folgenden Randwertproblems für die Biharmonische-Gleichung
$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$
falls
$$\int_U \Delta u \Delta v \, dx = \int_U f v \, dx$$
für alle $v \in H_0^2(U)$.

Zeige, dass für gegebenes $f \in L^2(U)$, eine eindeutige schwache Lösung von (*) existiert.