Proseminar Komplexe Analysis 1

Bernhard Lamel und Gerald Teschl

SS2007

Bemerkung: Die meisten Beispiel sind aus dem Buch von K. Jähnich, *Funktionentheorie*, Springer.

1. Beweise folgende Eigenschaften des Betrags $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x + \mathrm{i}y$:
   (a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
   (b) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).
2. Ist die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ (komplex) differenzierbar?
3. Sind folgende Reihen konvergent bzw. absolut konvergent?
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{i})^n}$.
4. Man zeige, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt und leite daraus ab:
   (a) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
   (b) $\mathrm{Re}(\cos(z)) =?$, $\mathrm{Im}(\cos(z)) =?$.
   (c) Kosinus hat nur reelle Nullstellen.
5. Man beschreibe die durch e^z gegebene Abbildung des Rechtecks $\{x+\mathrm{i}y | 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi\}$ in $\mathbb{C}$.

6. Man zeige, dass eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, konstant sein muss.

7. Unter der Länge einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \to U \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ versteht man bekanntlich die Zahl

$$L(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige, durch eine Konstante C dem Betrag nach beschränkte Funktion, $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in U$, dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq C \cdot L(\gamma).$$

8. Es sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, eine geschlossene differenzierbare Kurve. Nach einem bekannten Lemma, das wir hier aber als Definition lesen wollen, ist für geschlossene Kurven

$$F(\gamma) := \int_\gamma x\, dy = \int_0^1 x(t) y'(t) dt$$

der von γ umlaufene Flächeninhalt. Was bedeutet demnach das Kurvenintegral $\int_\gamma \overline{z} dz$ für eine geschlossenen Kurve in $\mathbb{C}$.

9. Zeigen Sie: Wenn $f(z)$ eine Stammfunktion $F(z)$ besitzt, dann ist

$$F(z) = F(z_0) + \int_\gamma f(z) dz$$

für *jeden* differenzierbaren Weg γ von z_0 nach z.

Versuchen Sie eine Stammfunktion $F(z)$ von $f(z) = \frac{1}{z}$ zu definieren indem Sie

$$F(z) = \int_\gamma \frac{dz}{z},$$

mit einer differenzierbaren Kurve γ von $z_0 = 1$ bis z, setzen. Berechnen Sie $F(z)$ für $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$. Kann es auch eine Stammfunktion auf ganz $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ geben?

Hinweis: Zur Berechnung des Integrals bieten sich Polarkoordinaten an. Setzen Sie $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und integrieren Sie zunächst entlang der reellen Achse von 1 nach r und dann entlang des Kreisbogens von r nach z.

10. Es sei
$$f(z) := (z-1-\mathrm{i})^{-2}\sin(z).$$
Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe um $z_0 = 0$.

11. Man berechne
$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin(z)}{z^4} dz.$$

12. Man beweise, dass in einem sternförmigen Gebiet jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt.

13. Sei f eine ganze nichtkonstante Funktion. Man beweise, dass die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

14. Es sei $n \in \mathbb{N}$, und r und c seien zwei positive reelle Zahlen. Für die ganze Funktion f gelte die Abschätzung $|f(z)| \leq c|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Man zeige, dass dann f ein Polynom höchstens n-ten Grades ist.

15. Sei z_0 eine Nullstelle einer holomorphen Funktion f. Man zeige: Genau dann kann man aus f lokal bei z_0 die k-te Wurzel ziehen (d.h. eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion h mit $(h(z))^k = f(z)$ finden), wenn k die Ordnung der Nullstelle teilt.

16. Sei $U_0 \subset \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ und $f_0 : U_0 \to \mathbb{R}$ **reell analytisch**, d.h. überall in U_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Man zeige, dass es eine in $\mathbb{C}$ offene Menge U mit $U \cap \mathbb{R} = U_0$ und eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f|U_0 = f_0$ gibt. Kann man im Falle $U_0 = (-1, 1)$ immer $U = \{z| \, |z| < 1\}$ wählen?

17. **Fresnel Integrale**: Man zeige, dass
$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$
gilt, indem man das Wegintegral
$$\int_{\gamma_R} \exp(-z^2)dz$$
untersucht. Dabei ist γ_R folgender geschlossener Weg: Die gerade Verbindung von 0 nach R, der Kreisbogen von R nach $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, die gerade Verbindung von $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ zurück nach 0.

(Hinweis: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ kann als bekannt vorausgesetzt werden.)

18. Man beweise, das Maximumsprinzip nicht nur für $|f(z)|$, sondern auch für $\mathrm{Re}(f(z))$ und $\mathrm{Im}(f(z))$ gilt.

19. Man schließe aus dem Schwarz'schen Lemma, dass eine biholomorphe, d.h. bijektiv und in beiden Richtungen holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe E auf sich, welche außerdem den Nullpunkt festläßt, eine Drehung sein muss.

20. Für die folgenden Beispiele holomorpher Funktionen auf $E\backslash\{0\} = \{z|0 < |z| < 1\}$ behandle man die isolierte Singularität 0 so: Ist dei Singularität hebbar, so hebe man sie, ist sie ein Pol, bestimme man den Hauptteil, und ist sie wesentlich, so bestimme man für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ das Bild von $\{z|0 < |z| < \varepsilon\}$ unter der Funktion:

$$\text{a) } \frac{1}{1-\mathrm{e}^z}, \qquad \text{b) } \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, \qquad \text{c) } \frac{\sin(z)}{z}.$$

21. Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei meromorph. Man zeige, dass die logarithmische Ableitung von f ebenfalls meromorph ist und höchstens Pole erster Ordnung hat. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)}, \qquad z_0 \in G.$$

Es sei z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$. Man zeige, dass z_0 kein Pol von $\exp(f(z))$ ist.

22. Man bestimme die Laurententwicklung von
$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$
im Kreisring $\{z| \, r < |z| < R\}$ für
   (a) $r = 0$ und $R = 1$,
   (b) $r = 1$ und $R = 2$,
   (c) $r = 2$ und $R = \infty$.

   (Hinweis: Partialbruchzerlegung und geometrische Reihe.)

23. Man bestimme die Automorphismen der komplexen Ebene, d.h. die biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ auf sich.

   (Hinweis: Wende für einen Automophismus f den Satz von Casorati–Weierstraß auf $f(\frac{1}{z})$ an und benütze Aufgabe 14.)

24. Für eine Funktion f sei sowohl $f(z)$ als auch $f(\frac{1}{z})$ meromorph in $\mathbb{C}$. Zeige dass $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit zwei Polynen $p(z)$ und $q(z)$ gilt.

   (Hinweis: Kann f unendlich viele Pole haben? Lokal können sich die Pole von f ja nicht häufen, aber wie sieht es mit ∞ aus? Wie kann man die Pole beheben?)

25. Sei $f : E \to E$ eine biholomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe E. Zeige, dass
$$f(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$
für ein $a \in E$ und ein λ mit $|\lambda| = 1$ ist.

(Hinweis: Zeige, dass $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ die offenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst abbildet und verwende dann Aufgabe 19.)

26. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg, K eine offene Kreisscheibe um $\gamma(t_0)$ und $f_0 : K \to \mathbb{C}$ holomorph. Man definiere $r : [t_0, t_1] \to [0, \infty]$ wie folgt: Ist f_0 längs $\gamma|[t_0, t]$ analytisch fortsetzbar, so bezeichne $r(t)$ den Konvergenzradius der Taylorreihe der durch die Fortseztung entstehenden Funktion an der Stelle $\gamma(t)$, sonst setze man $r(t) = 0$. Man zeige, dass $r(t)$ entweder für jedes oder für kein t unendlich ist und in letzterem Falle $r : [t_0, t_1] \to [0, \infty)$ stetig ist.

27. Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum und $x_0, x_1 \in X$. Man zeige, dass alle Wege von x_0 nach x_1 homotop zueinander sind.

28. Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Man zeige, dass es eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ für alle $z \in G$ gibt und dass dann $\{f + 2\pi\mathrm{i}k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller holomorphen Funktionen auf G mit dieser Eigenschaft ist („Zweige des Logarithmus" auf G).

29. Man formuliere und beweise eine analoge Aussage über die holomorphen Funktionen f mit $\mathrm{e}^{f(z)} = g(z)$ für eine gegebene nirgends verschwindende holomorphe Funktion g auf G.

30. Für gegebene $n, k \in \mathbb{Z}$ und $0 < r \neq 1$ bestimme man die Umlaufzahl der durch $\gamma(t) := \mathrm{e}^{int} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ definierten geschlossenen Kurve $\gamma(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ um den Nullpunkt.

    (Hinweis: Man defomiere γ stetig wobei Anfangs- und Endpunkt nicht fest bleiben müessen, solange nur die Kurve geschlossen bleibt.)

31. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eine geschlossene, an einem Punkt der positiven reellen Halbachse beginnende Kurve. Für $k \in \mathbb{N}$ werde die Auswahl eines Wertes $\sqrt[k]{\gamma(t)}$ für die k-te Wurzel von $\gamma(t)$ durch $\sqrt[k]{\gamma(t_0)} > 0$ und die Stetigkeit von $\sqrt[k]{\gamma} : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ festgelegt. Man berechne das dementsprechend aufgefasste Integral
$$\int_\gamma \sqrt[k]{z} dz.$$
(Hinweis: $\sqrt[k]{z} = \exp(\frac{1}{k} \log(|z|) + \frac{\mathrm{i}}{k} \arg(z))$.)

32. Man beweise, dass die Umlaufzahl um 0 einen Isomorphismus
$$\begin{array}{rcl} \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, 1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z} \\ [\alpha] & \longmapsto & \nu_\alpha(0) \end{array}$$
stiftet.

33. Welche Werte kann das Integral
$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$$
für geschlossene Kurven in $\mathbb{C}\backslash\{\pm\mathrm{i}\}$ annehmen?

34. Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls:

$$\text{(a):} \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}dx \qquad \text{(b):} \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}dx, \quad a>0$$

$$\text{(c):} \int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx, \quad a>0 \qquad \text{(d):} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

$$\text{(e):} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx \qquad \text{(f):} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}dx$$

35. Für rationale Funktionen $R(z)$ ohne Pole auf der abgeschlossenen positiven Halbgeraden $\mathbb{R}_0^+$ und mit einer mindestens doppelten Nullstelle bei ∞ leite man eine Residuenformel für $\int_0^\infty R(x)dx$ her, indem man den Residuensatz auf $R(z)\ln(z)$ in der positiv geschlitzten Ebene geeignet anwendet.

36. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell-linear unabhängig und f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe nichtkonstante **doppelt periodische Funktion** mit den Perioden ω_1 und ω_2, d.h. mit der Eigenschaft $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ für alle z. Man zeige, dass f auf dem „Fundamentalbereich“ $F := \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \,|\, 0 \leq \lambda_i < 1\}$ ebensoviele Polstellen wie Nullstellen hat (gezählt jeweils mit Vielfachheit).

    (Hinweis: Integrieren Sie $f'(z)/f(z)$ über den Rand des Fundamentalbereichs.)

37. Sei $P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Man beweise: Gilt $|P(z)| \leq 1$ für alle z mit $|z| = 1$, so folgt $P(z) = z^n$.

    (Hinweis: $z^n - tP(z)$, $0 \leq t < 1$ hat alle Nullstellen im Einheitskreis. Wie kann man mit dieser Information $|z^n - tP(z)|$ für $|z| \leq 1$ abschätzen?)

38. Es sei G ein beschränktes Gebiet, und $\overline{G}$ bezichne dessen abgeschlossene Hülle. Auf $\overline{G}$ sei eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ stetiger, auf G sogar holomorpher Funktionen gegeben, welche auf $\overline{G}\backslash G$ gleichmäßig konvergiert. Man zeige, dass dann die Folge auf ganz $\overline{G}$ gleichmäßig konvergiert.

    (Hinweis: Maximumsprinzip.)

39. Man zeige, dass für $\mathrm{Re}(z) > 1$ durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

eine holomorphe Funktion (die **Riemann'sche ζ-Funktion**) gegeben ist und gebe eine Reihendarstellung für $\zeta'(z)$ an.